

30/3/17

Την προηγούμενη φορά είπαμε:

Επίπεδο:

1) Διανυσματική εξίσωση: $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$
 όπου $\vec{a}, \vec{b}$ γ.Α // (π)
 $\vec{x}_0$ διάνυσμα θέσης ενός σημείου $P_0 \in (\pi)$ και
 $\vec{x}$ διάνυσμα θέσης του αχόρεος σημείου του (π)

2) Παραμετρική εξίσωση:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases}$$

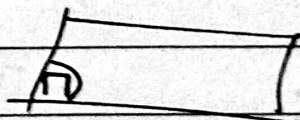
$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\ \vec{P}_0 &= (x_0, y_0, z_0) \\ \vec{P} &= (x, y, z) \end{aligned}$$

3) Αναλυτική εξίσωση:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$$

$$\vec{n} = (A, B, C)$$



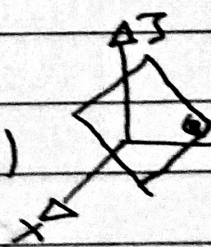
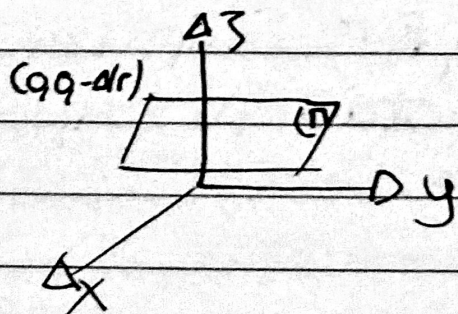
Ειδικές μορφές αναλυτικής εξίσωσης

(π) $Ax + By + Cz + D = 0$, $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$

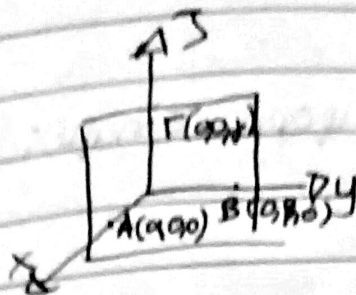
1) Για $D=0$, $Ax + By + Cz = 0 \Rightarrow \gamma(0, 0, 0) \in (\pi)$

$0(0, 0, 0) \in (\pi) \Leftrightarrow D=0$

2) $A=B=0$: (π) $z = -\frac{D}{C}$



3) $\Delta \neq 0$

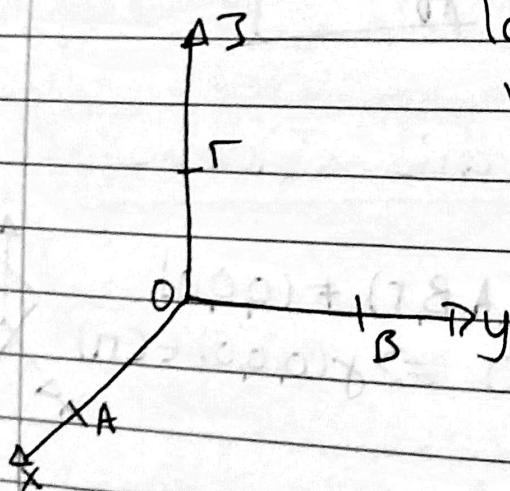


- Σημείο τομής τας (π) με τας άξονα OX: $A(-\frac{\Delta}{A}, 0, 0)$
- Σημείο τομής τας (π) με τας άξονα OY: $B(0, -\frac{\Delta}{B}, 0)$
- Σημείο τομής με ος άξονα: $\Gamma(0, 0, -\frac{\Delta}{\Gamma})$

~~Απ~~
(π) : $Ax + By + \Gamma z = -\Delta \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{\Delta}{A}} + \frac{y}{-\frac{\Delta}{B}} + \frac{z}{-\frac{\Delta}{\Gamma}} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$$

Παράδειγμα:



Τα σημεία $A(a, 0, 0), B(0, \beta, 0), \Gamma(0, 0, \gamma)$
κινούνται επί των άξονων

OX, OY, OZ αντίστοιχα, έτσι

ώστε $\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\kappa}$

όπου $\kappa = \text{σταθερά αριθμός}$

Δείξτε ότι το επίπεδο

που κάθε φορά ορίζουν

τα A, B, Γ διέρχεται

από σταθερό σημείο

Λύση: Η εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν τα Α, Β, Γ είναι $\left[\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1 \right] * \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} + \frac{x}{\beta} + \frac{x}{\gamma} = 1 \Rightarrow$$

Το σημείο $P_0(k, k, k)$ ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα Α, Β, Γ.

Διέδρες γωνίες - Διχοτόμος Διέδρης Γωνίας

Διχοτόμος ημισυνέδου.

Πρόταση: Το σημείο $P(x, y, z)$ ανήκει στο διχοτομο επίπεδο διέδρης γωνίας με έδρες $(\pi_1), (\pi_2)$

$$\Leftrightarrow d(P, (\pi_1)) = d(P, (\pi_2)). \quad (\pi_i): A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{|A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{|A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Παράδειγμα:

Δίνονται τα επίπεδα $(\pi_1): x + 2y - 3z - 1 = 0$,
 $(\pi_2): 2x + y - z + 3 = 0$

Αποδείξτε ότι ορίζεται διέδρη γωνία και να βρείτε το διχοτομικό επίπεδο της διέδρης γωνίας με έδρες $(\pi_1), (\pi_2)$ που περιέχει το $P_1(1, 2, 2)$.

Λύση: (Θα αποδ. ότι τα επίπεδα τέμνονται κατά μικρό ευθύγραμμο)

(Θα πάρουμε τα κάθετα διανύσματα και θα δούμε αν είναι Γ.Α άρα θα τέμνονται).

Τα διανύσματα $\vec{n}_1 = (1, 2, -3)$ και $\vec{n}_2 = (2, 1, -1)$ είναι κάθετα στα επίπεδα (π_1) και (π_2) αντίστοιχα.

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$\neq (0, 0, 0) \Rightarrow \vec{n}_1, \vec{n}_2 \text{ είναι Γ.Α} \Rightarrow$$

Άρα (π_1) και (π_2) τέμνονται κατά μόνον ευθείας και κατά συνέπεια ορίζουν διαφορετικά. Το σημείο $P(x, y, z)$ ανήκει στο διχοτομούν επίπεδο αν-ν $\Leftrightarrow d(P, (\pi_1)) = d(P, (\pi_2)) \Leftrightarrow$

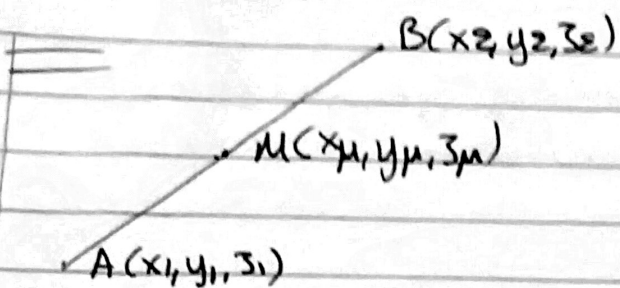
$$\frac{|x+2y-3z-1|}{\sqrt{1+2^2+(-3)^2}} = \frac{|2x+y-3+3|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x+2y-3z-1|}{\sqrt{14}} = \frac{|2x+y-3+3|}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} 1+2 \cdot 2-3 \cdot 1-1 < 0 \Rightarrow x+2y-3z-1 < 0 \\ (2 \cdot 1+1-3 \cdot 1+3 > 0 \Rightarrow 2x+y-3+3 > 0) \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{-(x+2y-3z-1)}{\sqrt{14}} = \frac{2x+y-3+3}{\sqrt{6}}$$

$\Leftrightarrow \dots$



Αν μας δώσουν συνεταγμένες μέσας τότε.

$$M \text{ μέσο} \Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{MB} \Leftrightarrow (x_\mu - x_1, y_\mu - y_1, z_\mu - z_1) = (x_2 - x_\mu, y_2 - y_\mu, z_2 - z_\mu)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_\mu = x_1 + x_2 \\ 2y_\mu = y_1 + y_2 \\ 2z_\mu = z_1 + z_2 \end{cases}$$

Συμπέρασμα: Οι συνεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB είναι

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

Μεσοπαράλληλο επίπεδο παράλληλο επιπέδου

Δίνονται τα παράλληλα επίπεδα:



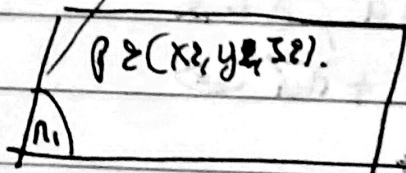
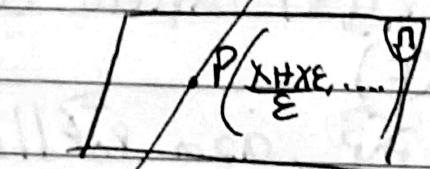
$$(Π_1) \quad Ax + By + Cz + \Delta_1 = 0 \quad \Delta_1 \neq \Delta_2$$

$$(Π_2) \quad Ax + By + Cz + \Delta_2 = 0$$

κάθε επίπεδο $(Π) \parallel (Π_1), (Π_2)$

έχει ως κάθετο διάνυσμα το $\vec{n} = (A, B, C)$. Άρα έχει αναλυσ. εξ.

$$(Π): \underline{Ax + By + Cz + \Delta = 0}$$



Πρόβλημα: Να βρεθεί ο γεμετρικός τόπος των σημείων που ~~είναι~~ ισαπέχουν από τα $(\pi_1), (\pi_2)$

Λύση: Ρ σημείο του γεμετρικού τόπου (γ, τ)
 $\Leftrightarrow d(P, (\pi_1)) = d(P, (\pi_2))$

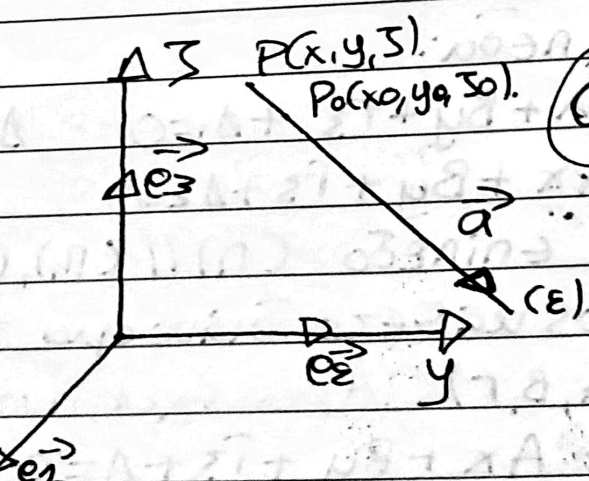
$$\Leftrightarrow \frac{|Ax+By+\Gamma z+\Delta_1|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} = \frac{|Ax+By+\Gamma z+\Delta_2|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ax+By+\Gamma z+\Delta_1 = \pm Ax - By - \Gamma z - \Delta_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Ax+By+\Gamma z + \frac{\Delta_1 \pm \Delta_2}{2} = 0}$$

Άρα ο γ, τ είναι το μεσοσημείο ενینهδο!

ΕΥΘΕΙΕΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ



(1) Καθορισμός ευθείας E η οποία διέρχεται από το $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι $\parallel \vec{a} \neq \vec{0}$. Έστω $P(x, y, z)$ σημείο της ευθείας (E) .

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + \vec{P_0P}, \text{ άρα } \vec{P_0P} \parallel \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \vec{P_0P} = \lambda \vec{a}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{x}}}{\vec{OP}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{x_0}}}{\vec{OP}_0} + \lambda \vec{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{x} = \vec{x_0} + \lambda \vec{a}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Διαφορετική
Εξίσωση του
(E).

- Παραμετρικές εξισώσεις:
 $\vec{x} = (x, y, z)$ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$
 $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Η διανομαστική εξίσωση $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ } Παραμετρικές εξισώσεις

- Συμμετρικές εξισώσεις:
 (κάνω απαλοιφή της παραμέτρου!)

Παραμ. εξισώσεις $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x-x_0}{a_1} \\ \lambda = \frac{y-y_0}{a_2} \\ \lambda = \frac{z-z_0}{a_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} \\ \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{z-z_0}{a_3} \end{cases}$

ΕΥΘΕΙΑ ΠΩΣ Ε x, x_0, y, y_0 και $//$ προς a_1, a_2, a_3 .
 ΣΥΜ-ΕΞΙΣ.

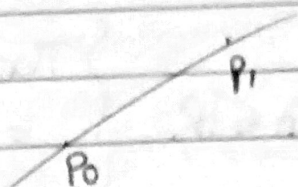
$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} \\ \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{z-z_0}{a_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$
 Αναλ. Εξ.

Π.χ $\frac{x-3}{0} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y-7 = z-1 \end{cases}$

Ευθεία που διέρχεται από το $P_0(3, 7, -1)$ και είναι $// \vec{a} = (0, 2, 1)$.

Ο ελάχιστος αριθμός ~~που~~ ~~τα~~ εξισώσεων που παριστάνει ευθεία είναι 2 (όχι 1)
 Άρα ελαττώσαμε ότι μια ευθεία είναι τμήν 2 επιπέδων.

- (2) Η ευθεία (ε) καθορίζεται από 2 διαφορετικά σημεία της $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ή ισοδύναμα από το P_0 και το διάνυσμα $\vec{a} = \vec{P_1P_0} + \vec{d}$
 $\vec{a} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$



• Διαν. εξ. $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda (\vec{x}_1 - \vec{x}_0), \lambda \in \mathbb{R}$

• Παρ. εξ.
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda (x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda (y_1 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda (z_1 - z_0) \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

• Αναλ. εξ.

• Συμ. εξ.
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

συν. διαίτητες.

Παράδειγμα (πως παίρνουμε από ~~παράμετρο~~ ^{συν. εξ.} ~~συν. εξ.~~ ^{αναλ. εξ.} ~~συν. εξ.~~)

Δίνεται η ευθεία (ε):
$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 & (n_1) \\ 3x - y + 2z + 4 = 0 & (n_2) \end{cases}$$

Ν. β. οι συμμετρικές εξισώσεις

Λόγω $\vec{n}_1 = (2, -3, 1) \perp (n_1)$ $\vec{n}_2 = (3, -1, 2) \perp (n_2)$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5, -1, 7) \neq \vec{0}$$

Άρα $(n_1), (n_2)$ τέμνονται

Αναζητώ κοινό σημείο των $(\pi_1), (\pi_2)$ με $z=0$
 Λύνοντας το σύστημα έχω:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 3x - y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7} \left(\frac{2}{3} - y \right) \\ y = \frac{2}{3} - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{7} - 2 \\ y = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Ένα σημείο της (ε) είναι το $P_0\left(\frac{10}{7}, \frac{2}{7}, 0\right)$.



$$\begin{cases} \vec{n}_1 \perp (\pi_1) \\ \vec{n}_2 \perp (\pi_2) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel (\varepsilon).$$

$$\frac{x+2}{-5} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{7}$$

Παραμέσ.